1[er] Problema *Sea U el espacio generado por las funciones $\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$. Estudiar existencia y unicidad de solución del problema de hallar $u \in U$ que interpole a la función $f(x) = e^x$ en los puntos $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi$, obteniendo la solución o soluciones en el caso de que sea posible.*

Se busca una función del tipo $u(x) = a + b \operatorname{sen} x + c \cos x$ tal que $u(x_i) = e^{x_i}, i = 0,1,2.$ Teniendo en cuenta los valores de las funciones $e^x, \operatorname{sen} x, \cos x$ en los puntos dados, estas condiciones son

$$\left.\begin{array}{llll} a & & +c = & 1 \\ a & +b & = & e^{\pi/2} \\ a & & -c = & e^{\pi} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema (1) es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

por lo que el sistema tiene solución única. Es decir, el problema de interpolación tiene una única solución $u(x) = a + b \operatorname{sen} x + c \cos x$.

Por otra parte, resolviendo (1) se obtiene $a = \frac{1+e^{\pi}}{2}, b = -\frac{(1-e^{\pi/2})^2}{2}, c = \frac{1-e^{\pi}}{2}$, por lo que la solución buscada es $u(x) = \frac{1+e^{\pi}}{2} - \frac{(1-e^{\pi/2})^2}{2} x + \frac{1-e^{\pi}}{2} x^2$.

2º Problema

(a) *Construir los splines de segundo grado sobre el intervalo $[-1,1]$ asociados a la partición $\{-1,0,1\}$. ¿Cuál es la dimensión del espacio construido?*

Los splines buscados son funciones del tipo

$$s(x) = \begin{cases} A + Bx + Cx^2, x \in [-1,0] \\ D + Ex + Fx^2, \ x \in [0,1] \end{cases}$$

continuas y con derivada continua. De la continuidad en $x = 0$ se deduce $A = D$. Del hecho de tener derivada continua se deduce $B = E$, siendo

$$s'(x) = \begin{cases} B + 2Cx, x \in [-1,0] \\ E + 2Fx, \ x \in [0,1] \end{cases}$$

Es decir, los splines buscados tienen la forma

$$s(x) = \begin{cases} A + Bx + Cx^2, x \in [-1,0] \\ A + Bx + Fx^2, \ x \in [0,1] \end{cases} \qquad (2)$$

La dimensión del espacio es, por tanto, cuatro.

(b) Obtener un spline $s(x)$ en las condiciones del apartado anterior que interpolea la función $f(x)=e^x$ en los puntos $\{-1,0,1\}$ y que cumpla $s'(0)=f'(0)$.

Si se busca un spline en las condiciones anteriores que cumpla $s'(0)=f'(0)$ se tendrá $B=1$ en (2), pues $f'(0)=e^0=1$. Imponiendo, además, las condiciones de interpolación tendremos

$$\left.\begin{array}{lll} A & +C & = e^{-1}+1 \\ A & & = e^0 \\ A & +F & = e-1 \end{array}\right\}$$

La solución (única) del sistema anterior es $A=1, C=e^{-1}, F=e-2$, por lo que el spline buscado es

$$s(x)=\begin{cases} 1+x+e^{-1}x^2, & x\in[-1,0] \\ 1+x+(e-2)x^2, & x\in[0,1]. \end{cases}$$

<u>3[er] Problema</u>

Se tienen la siguiente tabla de datos sobre el tiempo (segundos) que tarda en llegar al suelo un cuerpo, en función de la altura (metros) desde la que se deja caer:

Tiempo:t	***Altura:h***
0.2	*0.1960*
0.4	*0.7850*
0.6	*1.7665*
0.8	*3.1405*
1	*4.9075*

Encontrar la función $h(t)=\frac{1}{2}gt^2$ que ajuste en el sentido de mínimos cuadrados a los datos anteriores, y así poder determinar un valor aproximado de la constante g.

La función a buscar se puede escribir como $h(t)=ct^2=cf(t)$ y $c=\frac{1}{2}g$

Tenemos que minimizar en el sentido de los mínimos cuadrados la distancia entre los $h(t_i)=cf(t_i)$ y los h_i

$$\begin{pmatrix} 0.2^2 \\ 0.4^2 \\ 0.6^2 \\ 0.8^2 \\ 1^2 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 0.1960 \\ 0.7850 \\ 1.7665 \\ 3.1405 \\ 4.9075 \end{pmatrix}$$

Ahora entonces podemos proceder como un problema típico de mejor aproximación por mínimos cuadrados discretos, donde se trata de aproximar al vector $\vec{h} = \begin{pmatrix} 0.1960 \\ 0.7850 \\ 1.7665 \\ 3.1405 \\ 4.9075 \end{pmatrix}$ en un subespacio donde la base es $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0.2^2 \\ 0.4^2 \\ 0.6^2 \\ 0.8^2 \\ 1^2 \end{pmatrix}$ y aplicando el teorema de proyección ortogonal podemos encontrar el valor de c y por lo tanto g.

$$< \vec{h} - c\vec{f}, \vec{f} >= 0$$

$c = \dfrac{< \vec{h}, \vec{f} >}{< \vec{f}, \vec{f} >}$, siendo la definición del producto escalar $< \vec{f}, \vec{g} >= \sum_{i=1}^{m} f(x_i)g(x_i)$

$$c = \frac{0.2^2 * 0.1960 + 0.4^2 * 0.7850 + 0.6^2 * 1.7665 + 0.8^2 * 3.1405 + 1^2 * 4.9075}{0.2^4 + 0.4^4 + 0.6^4 + 0.8^4 + 1^4} = 4.9073$$

$$h(t) = 4.9073t^2$$

$$g = 2c = 9.8146$$